3) Hata formülü $f(x)-P_2(x)=\dfrac{f'''(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

dir. $f(x_0)=f(-1)=2.(-1)+1+1=0$ $\quad f(x_1)=f(0)=1$

$f(x_2)=f(2)=2.2^5+2^2+1=2.32+4+1=69$ o halde

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	0	1	69

olur. Buna göre $P_2(x)=?$ Veya direkt $P_2(1)$

bulalım. $\cancel{P_2(1)=\dfrac{(1-x_1)(1-x_2)}{(-1-0)(-1-2)}\cdot 0+\dfrac{(1-x_0)(1+x_2)}{0-x_0}}$

$$P_2(1)=\frac{(1-0)(1-2)}{(-1-0)(-1-2)}\cdot 0+\frac{(1-(-1))(1-2)}{(0-(-1))(0-2)}\cdot 1+\frac{(1+(+1))(1-0)}{(2-(-1))(2-0)}\cdot 69$$

$$=\frac{-1}{-1.-3}\cdot 0+\frac{2.(-1)}{1.(-2)}\cdot 1+\frac{2.1}{3.2}.69$$

$=1+23 \Rightarrow P_2(1)=24$ olur. O halde hata formülünde

$x=1$ alınırsa $f(1)-P_2(1)=\dfrac{f'''(\xi_1)}{3!}(1-(-1))(1-0)(1-2)$ den

$\cancel{f(1)=2}$. $f(x)=2x^5+x^2+1$ den $f'(x)=10x^4+2x$ $\quad f''(x)=40x^3+2$

$f'''(x)=120x^2$ den $f'''(\xi_1)=120\xi_1^2$, $f(1)=2.1^5+1^2+1=4$

olduğundan $4-24=\dfrac{120\xi_1^2}{6}\,2.1.(-1) \Rightarrow -20=-40\xi_1^2 \Rightarrow \xi_1^2=\dfrac{1}{2}$

$\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt2}$, $\xi_1=-\dfrac{1}{\sqrt2}$ olur. (Ancak $\dfrac{1}{\sqrt2}\in[0,2]$ ve $-\dfrac{1}{\sqrt2}\notin[0,2]$ olduğundan $\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt2}$ alınması uygundur, çünkü $x=1\in[0,2]$ olduğundan)

No
Ad Soyad

Nümerik Analize Giriş

21.04.2022

1) $f(x)$ ve x_0, x_1, x_2 ayrık noktaları veriliyor. Bu ayrık noktalardan geçen interpolasyon polinomunun derecesinin sıfır olması için $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ değerleri nasıl olmalıdır. Açıklayınız. Bu şartlar altında sıfırıncı dereceden interpolasyon polinomunu bulunuz.

2) $x - 2^{-x} = 0$ denkleminin bir kökünün $[0,1]$ aralığında olduğu biliniyor. Buna göre $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ayrık noktaları için bu denklemin kökünü interpolasyon polinomu yardımıyla bulunuz.

3) $f(x) = 2x^5 + x^2 + 1$ fonksiyonu ve $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ ayrık noktaları veriliyor. Buna göre $f(1)$ değerinin hata hesaplanmasında $x=1$'e karşılık gelen ξ_1 değeri varsa bulunuz.

4) $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ için $P_{01}(x) = 2x+1$, $P_{12}(0) = 5$ olduğuna göre $P_{012}(0) = ?$ $f(x_2) = f(2) = ?$ bulunuz.

5) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$, $x_2 = 9$ olduğuna göre $\sqrt{2}$ değerini interpolasyon polinomu yardımıyla hesaplayınız.

6) $f(x) = \pi \cos x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$, $x_2 = \pi$ olmak üzere bölünmüş fark interpolasyon polinomunu bulunuz. Ve $f(\frac{\pi}{3})$ değerini interpolasyon polinomu yardımıyla ~~bulunuz~~ hesaplayınız.

Not: Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız.

Başarılar... N.A.

6) $f(x)=\pi\cos x$ $\quad x_0=0,\ x_1=\pi/2,\ x_2=\pi$ için bölünmüş fark int. polinomu $P_2(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$

$f(x_0)=f(0)=\pi\cdot\cos 0=\pi\cdot 1=\pi$, $f(x_1)=f(\pi/2)=\pi\cdot\cos\pi/2=\pi\cdot 0=0$

$f(x_2)=f(\pi)=\pi\cos\pi=\pi\cdot(-1)=-\pi$ dir. Bölünmüş fark tablosu

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$
x_0	$f(x_0)$		
		$f[x_0,x_1]$	
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$
		$f[x_1,x_2]$	
x_2	$f(x_2)$		

x_i	$f(x_i)$		
0	π		
		$\frac{0-\pi}{\pi/2-0}=-2$	
$\frac{\pi}{2}$	0		$\frac{-2-(-2)}{\pi-0}=0$
		$\frac{-\pi-0}{\pi-\pi/2}=\frac{-\pi}{\pi/2}=-2$	
π	$-\pi$		

$P_2(x)=\pi+(x-0)(-2)+(x-0)(x-\pi/2)\cdot 0=\pi-2x$ ~~x=π/3 için~~

$x=\frac{\pi}{3}$ için $f(\frac{\pi}{3})\approx P_2(\frac{\pi}{3})=\pi-2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi-2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ olur.

Doğruluğunu görmeye çalışalım. $f(x)$, $[0,\pi]$ de monoton azalan olduğundan

$x_0=0<x=\pi/3<x_1=\pi/2$ ~~olduğu~~ için

$f(x_0)=f(0)=\pi > f(x)=f(\frac{\pi}{3})\approx\frac{\pi}{3} > f(x_1)=f(\pi/2)>0$ olur.

Yani $\pi>f(\frac{\pi}{3})\approx\frac{\pi}{3}>0$ eşitsizliği sağlandığından

sonuç tutarlıdır.

4) $P_{012}(0)=\dfrac{\begin{vmatrix} P_{01}(0) & x_0-0 \\ P_{12}(0) & x_2-0 \end{vmatrix}}{x_2-x_0}$, $P_{01}(x)=2x+1$ old. dan $\underline{P_{01}(0)=1}$

$P_{12}(0)=5$ ve $x_0=-1$, $x_2=2$ old. dan

$P_{012}(0)=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{2-(-1)}=\dfrac{2+5}{3}=\underline{\dfrac{7}{3}}$ olur. $f(x_2)=f(2)=?$

Bunun için $P_{01}(x_0)=f(x_0)$, $P_{01}(x_1)=f(x_1)$ old. dan

$P_{01}(x_0)=\underbrace{\cancel{f(x_1)}}_{2x_0+1}$ dan $P_{01}(-1)=2.(-1)+1=-2+1=-1$ olur.

$P_{01}(x)=f(x_1)=f(1)=3$ dir. Diğer taraftan $P_{12}(0)=5$ old. da

$P_{12}(0)=\dfrac{\begin{vmatrix} f_1 & x_1-0 \\ f_2 & x_2-0 \end{vmatrix}}{x_2-x_1}$ den $P_{12}(0)=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ f_2 & 2 \end{vmatrix}}{2-1}=\dfrac{6-f_2}{1}=6-f_2$ olur.

$P_{12}(0)=5$ old. dan $6-f_2=5$ den $f_2=6-5=1$ $\underline{f(x_2)=f(2)=1}$ olur

5) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ için x yerine ne yazalım ki $\sqrt{2}$ ye eşit olsun.

$f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$ olur $f(2)=\dfrac{2.\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ olur. O halde

soru $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ ve $x_0=1$, $x_1=4$, $x_2=9$ için $f(2)=?$ şekline dönüşü

$f(x_0)=f(1)=2$ $f(x_1)=f(4)=\dfrac{2}{\sqrt{4}}=1$ $f(x_2)=\dfrac{2}{\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$ olur.

$P_2(2)=\dfrac{(2-4)(2-9)}{(1-4)(1-9)}.2+\dfrac{(2-1)(2-9)}{(4-1)(4-9)}.1+\dfrac{(2-1)(2-4)}{(9-1)(9-4)}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{-2.-7}{-3.-8}.2+\dfrac{1.-7}{3.-5}1+\dfrac{1.-2}{8.5}.\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{7}{3.2}+\dfrac{7}{3.5}-\dfrac{1}{2.3.5}=\dfrac{7.5+7.2-1}{2.3.5}=\dfrac{35+14-1}{2.3.5}=\dfrac{48}{2.3.5}=\dfrac{24}{3.5}=\dfrac{8}{5}$

$(\sqrt{2}=1.41421356)$, $P_2(2)=\dfrac{8}{5}=1{,}6\approx f(2)=\sqrt{2}$ dır.

Öyle ki $x_0=1<2<x_1=4$ için $f(x_0)=f(1)=2<f(2)=\sqrt{2}\approx 1{,}6<f(x_1)=f(4)=1$ olduğu açıktır. Bulunan sonucun doğruluğu bu şekilde gösterilmiş olur.

N. Analize Giriş Ara Sınav Çözümleri

1) Sıfırıncı dereceden interpolasyon polinomu $P_0(x) = a$ (a sabit) şeklindedir. $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$ ayrık noktalarından geçen interpolasyon polinomu (derecesi 2 yi geçmediğinden) $P_0(x_i) = f(x_i)$ $i=0,1,2$ şartını sağlayacak şekilde bulunduğundan ve $P_0(x_i) = a$ olması istendiğinden $i=0,1,2$ için $f(x_i) = a$ olmalıdır. Yani $f(x_0)=a$, $f(x_1)=a$; $f(x_2)=a$ olur.
Genel olarak $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ olması durumunda interpolasyon polinomunun derecesi sıfırdır.
Gerçekten $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = a$ (a sabit) olsun
Bu durumda interpolasyon polinomu Lagrange formunda

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} a + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} a + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} a \text{ olur}$$

Paydalar eşitlenirse

$P_2(x) = a$ çıkar

Veya $$P_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0-x \\ f_1 & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0}, \quad P_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & x_1-x \\ f_2 & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1}$$

$$P_{01}(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & x_0-x \\ a & x_1-x \end{vmatrix}}{x_1-x_0} = a\frac{x_1-x-(x_0-x)}{x_1-x_0} = a\frac{x_1-x_0}{x_1-x_0} = a$$

$$P_{12}(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & x_1-x \\ a & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_1} = a\frac{x_2-x-(x_1-x)}{x_2-x_1} = a\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1} = a$$

$$P_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_{01}(x) & x_0-x \\ P_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0} = \frac{\begin{vmatrix} a & x_0-x \\ a & x_2-x \end{vmatrix}}{x_2-x_0} = a\frac{x_2-x-(x_0-x)}{x_2-x_0} = a\frac{x_2-x_0}{x_2-x_0} = a$$

$P_{012}(x) = a$ olur. Ya da bölünmüş fark int. polinom ile

$$f[x_0,x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{a-a}{x_1-x_0} = 0, \quad f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{a-a}{x_2-x_1} = 0$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{a-a}{x_2-x_0} = 0$$

$$P_2(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] = a+0+0 = a \text{ olur}$$

2) $f(x)=x-2^{-x}$ alınırsa $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1$ için $f(x^*)=0$ olacak şekilde $x=x^*$ ters int. polinomu yardımıyla bulunur.

$f(-1)=-1-2^{1}=-3$ $\quad f(0)=-1$, $f(1)=1-\frac{1}{2}=1/2$ dir.

$-1<0<1$ ve $f(-1)<f(0)<f(1)$ yani $-3<-1<1/2$ old. dan $f(x)$ $[-1,1]$ de monotondur. O halde ayrık noktalar ile fonksiyonun değerleri yer değiştirilebilir. Buna göre ayrık noktalar $y_0=-3$, $y_1=-1$ $y_2=1/2$ ve fonksiyon (ters fonksiyon) değerleri $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ alınırsa int. polinomunun $P_2(y)$ de $y=0$ için $P_2(0)=x^*$ olacağından

$$P_2(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}x_0+\frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}x_1+\frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}x_2$$

den $y=0$ için

$$P_2(0)=\frac{-(-1)\cdot(-1/2)}{(-3-(-1))(-3-1/2)}\cdot(-1)+\frac{-(-3)\cdot(-1/2)}{(-1-(-3))(-1-1/2)}\cdot 0$$

$$+\frac{-(-3)\cdot(-(-1))}{(1/2-(-3))(1/2-(-1))}\cdot 1 \qquad P_2(0)=\frac{-1/2}{-\cancel{2}\cdot-\frac{7}{\cancel{2}}}(-1)+0+\frac{3}{\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0)=\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{\cancel{3}\cdot 4}{\cancel{3}\cdot 7}=\frac{1+4\cdot 2}{2\cdot 7}=\frac{9}{14}\in[0,1] \text{ dir.}$$

İster Nevilleden ister bölünmüş fark int. polinomundan yararlanın sonuç $x^*=\frac{9}{14}$ bulunur.